

Aufgaben zur Flächenberechnung

- 1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a so, dass das Flächenstück, das von G_f und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird, 9 FE beträgt. ☒

- 2 Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$.

Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die begrenzt ist durch den Graphen von f , die x -Achse und die vertikalen Geraden $x = -1$ und $x = 3$. ☐

- 3 Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 3$.

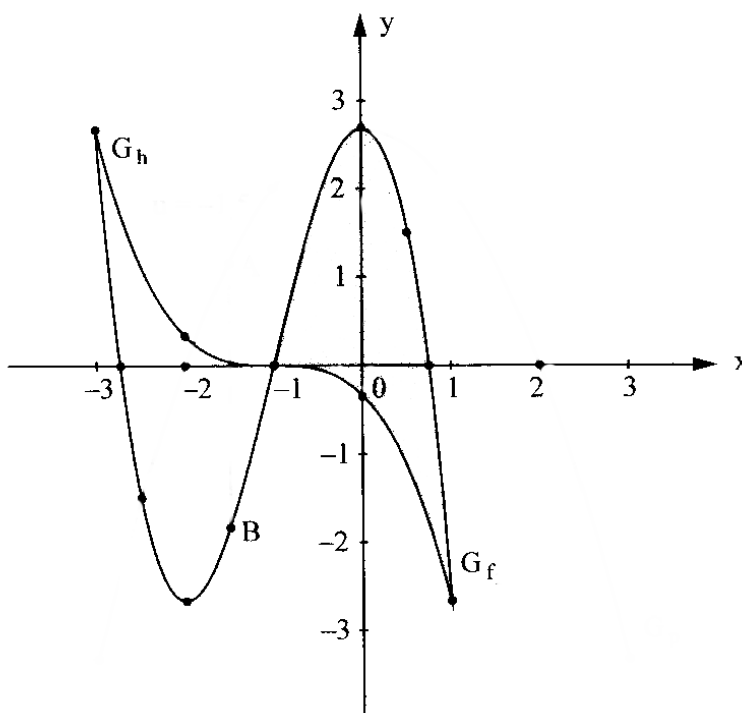
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist durch die x -Achse, die y -Achse und die Gerade $x = 4$. ☐

- 4 Die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{4}{3}(-x^3 - 3x^2 + 2)$ und

$h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$ begrenzen ein endliches Flächenstück, das den

Koordinatenursprung enthält.

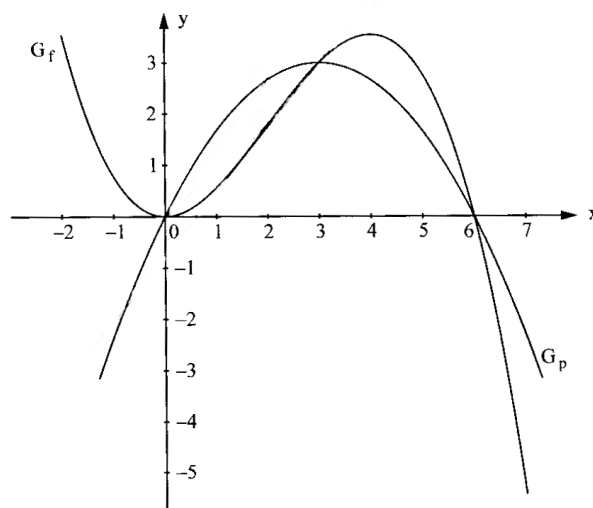
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 1996 AI) ☒



- 5 Die Graphen der Funktionen $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ und $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2$ schließen

zwei endliche Flächenstücke ein.

Berechnen Sie für das Flächenstück, das den Koordinatenursprung als Randpunkt enthält, die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 1996 AII) 



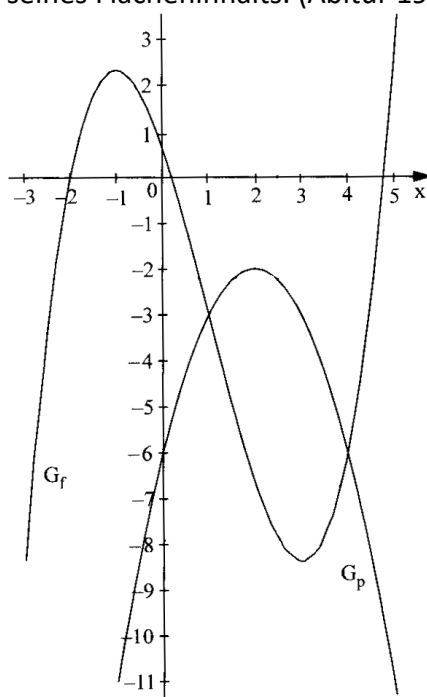
- 6 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die im Intervall $[-3;2]$ zwischen den Graphen der Funktion f und der Funktion $g: g(x) = \frac{1}{2}x^2$ liegt. 

- 7 Die Graphen der Funktionen $p(x) = -x^2 + 4x - 6$ und $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$

schließen im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.

Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 1997 AII) 



- 8 Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{8}(x-4)^2(x+k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Für einen geeigneten Wert des Parameters k hat die zugehörige Funktion f_k eine Stammfunktion F , deren Graph G_F im Koordinatenursprung einen Wendepunkt besitzt. Bestimmen Sie diesen Wert des Parameters k und den Funktionsterm $F(x)$ der Stammfunktion F . (Abitur 1998 AI) 

- 9 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 9$.

Die Funktion F ist diejenige Stammfunktion der Funktion f mit $D_F = \mathbb{R}$, deren Graph G_F den Punkt $A(-3/0)$ enthält.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $F(x)$. 

- 10 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$ und die x -Achse

schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau. (Abitur 2010 AI) 

- 11 Zeigen Sie, dass die Funktionen f mit $f(x) = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$ und g_1 mit

$$g_1(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \text{ bei } x = 4 \text{ einen gemeinsamen Punkt besitzen.}$$

Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse

ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. 

(Abitur 2010 AII)

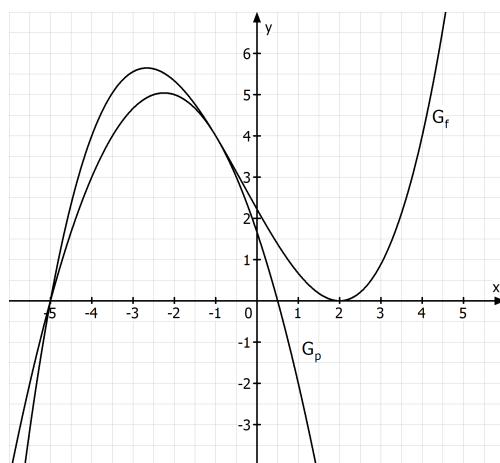
- 12 Gegeben sind die reellen Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20)$ und p mit

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}. \text{ Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktionen } f \text{ und } p$$

schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie in folgendem

Diagramm das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei

Nachkommastellen genau. (Abitur 2011 AI) 

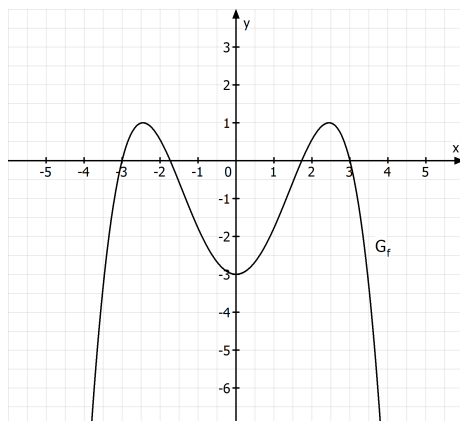


13.0 Gegeben sind die reellen Funktionen f mit $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ und p mit

$$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1. \quad (\text{Abitur 2011 All})$$

13.1 Zeigen Sie, dass p genau zwei gemeinsame Nullstellen mit der Funktion f hat.

Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in folgendes Diagramm ein. ○



13.2 Die Graphen der Funktionen f und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau. ⚡

13.3 Die in 13.2 beschriebene Fläche stellt die Form eines Firmenlogos dar. Es soll aus einer dünnen Styroporplatte ausgesägt werden. Die Platte wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = -3$ und $y = 1$ von außen begrenzt. Berechnen Sie den Anteil des Abfalls nach dem Ausschneiden in Prozent. ⚡

14 Der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$ und die x -Achse

begrenzen im vierten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. (Abitur 2012 AI) ⚡

15 Die Tangente G_t mit $t: x \mapsto -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ mit $D_t = \mathbb{R}$ an den Graphen G_f der Funktion f im

Punkt $P(-2/2)$, der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und

die y -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses

Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl

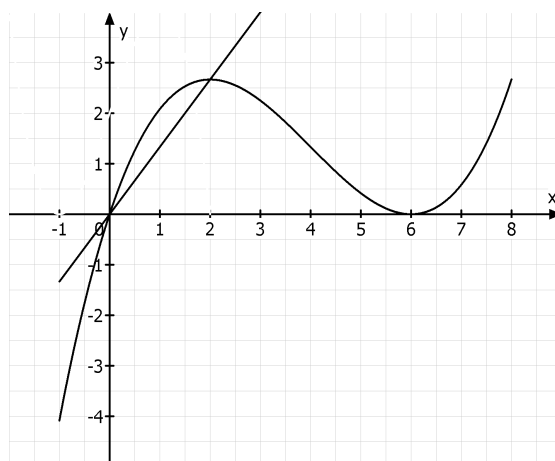
seines Inhalts. (Abitur 2012 All) 

16 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$ und g mit $g(x) = \frac{4}{3}x$.

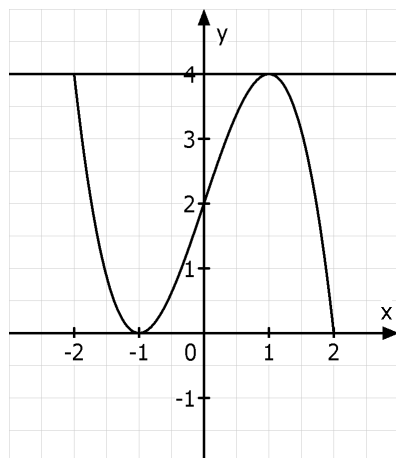
Die Gerade G_g , die x -Achse und der Graph von f schließen im I. Quadranten ein

Flächenstück ein. Markieren Sie diese Fläche im nachfolgenden Schaubild

und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl. (Abitur 2013 AI) 



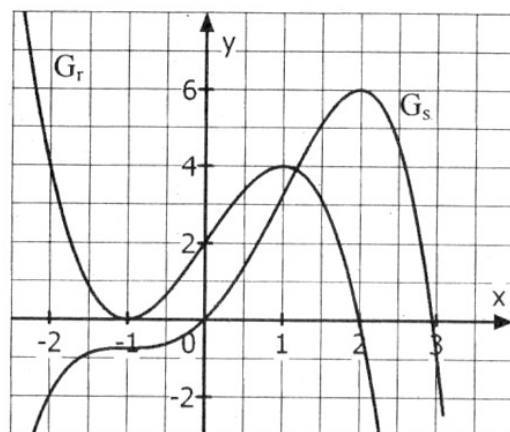
17.0 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ und g mit $g(x) = 4$.
(Abitur 2013 All)



17.1 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_1 , welches der Graph G_f und die Gerade G_g mit der y -Achse im II. Quadranten einschließen.

17.2 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts für das Flächenstück F_2 , welches der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt.
Vergleichen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von F_1 und F_2 . Welche Vermutung legt das Ergebnis bezüglich des Punktes $P(0/2)$ nahe ?

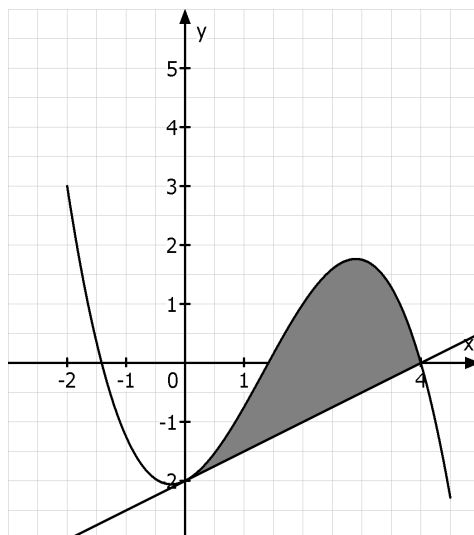
18 Die folgende Darstellung zeigt den Graphen G_r der ganzrationalen Funktion r und den Graphen G_s der ganzrationalen Funktion s . (Abitur 2013 All)
Begründen Sie: Die Funktion s kann eine Stammfunktion der Funktion r sein.



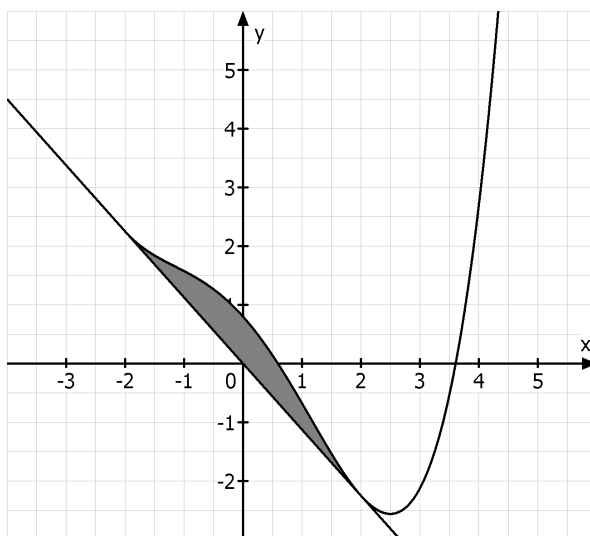
19 Die Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(x^3 - 4x^2 - 2x + 8)$ und

G_t der Funktion $t: x \mapsto \frac{1}{2}x - 2$ schließen ein endliches Flächenstück ein (siehe auch untenstehende Skizze).

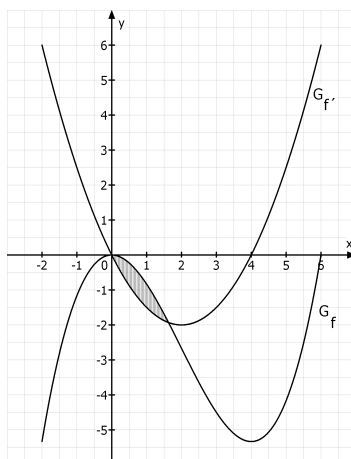
Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2014 AI) 



20 Die Graphen G_f mit $f: x \mapsto \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5}$ und G_g mit $g: x \mapsto -\frac{9}{8}x$ schließen ein endliches Flächenstück ein (siehe auch nachfolgende Skizze). Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2014 AII) 

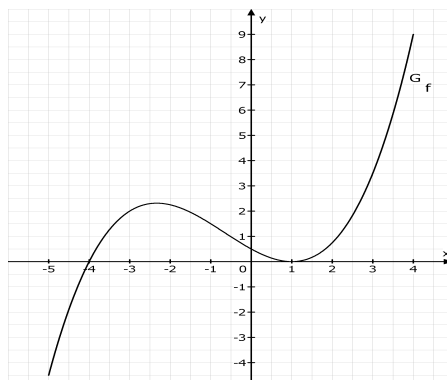


- 21 Die Graphen G_f und $G_{f'}$ mit $f: x \mapsto \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2)$ und $f': x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x$ schließen ein im 4. Quadranten gelegenes endliches Flächenstück ein (siehe auch nachfolgende Abbildung). Berechnen Sie die Maßzahl dieses Flächenstücks und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2015 AI) ☒



- 22.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$ und p mit $p''(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Abitur 2015 AII)
- 22.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$, wenn der Punkt $A(-4/8)$ auf der Parabel G_p und ihr Scheitel bei $x_s = -\frac{1}{8}$ liegt. ☐
- (Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{4}x + 1)$)
- 22.2 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen p und f und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \leq x \leq 4$ in untenstehendes Koordinatensystem ein. ☒
- 22.3 Geben Sie die Lösung der Ungleichung $p(x) - f(x) > 0$ an und erläutern Sie, was das Ergebnis für die Graphen G_f und G_p bedeutet. ☐

- 22.4 Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. ○

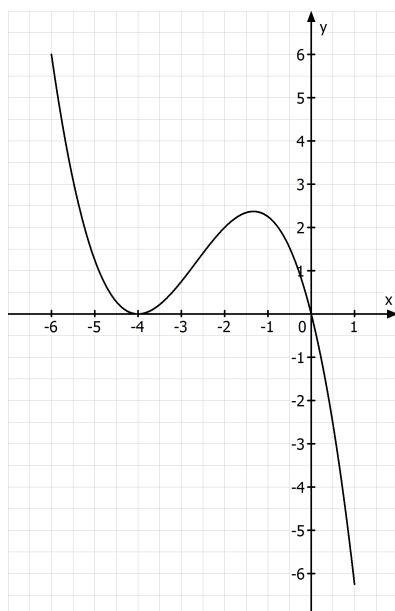


- 23.0 Der Graph G_p der quadratischen Funktion p enthält die Punkte $A(-6/6)$, $B(-2/-2)$ und $C(1/2,5)$. (Abitur 2016 AI)

- 23.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. ⚡

(mögliches Teilergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x)$)

- 23.2 Zeichnen Sie den Graphen G_p im Bereich $-6 \leq x \leq 1$ in untenstehendes Koordinatensystem ein. ○



- 23.3 Die Graphen G_f mit $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(x^3 + 8x^2 + 16x)$ und G_p schließen insgesamt zwei endliche Flächenstücke ein. Markieren Sie im vorhandenen Koordinatensystem das weiter links gelegene und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die ganzzahligen Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden. ⚡

24.0 Die Parabel P ist der Graph der quadratischen Funktion p. $S(-4/4)$ ist der Hochpunkt von

P und zugleich Schnittpunkt von P mit G_f , wobei $f: x \mapsto -\frac{1}{16}(3x^3 + x^2 - 40x - 48)$.

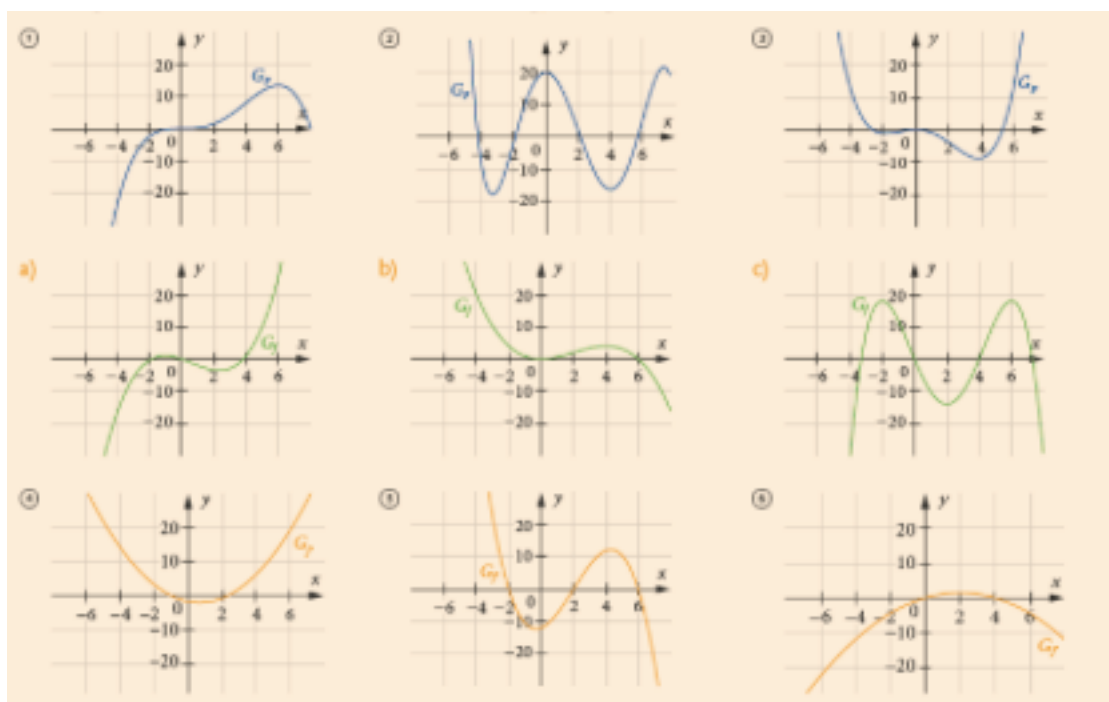
Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse. (Abitur 2016 All)

24.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm von p und zeichnen Sie die Parabel P im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem ein. ○

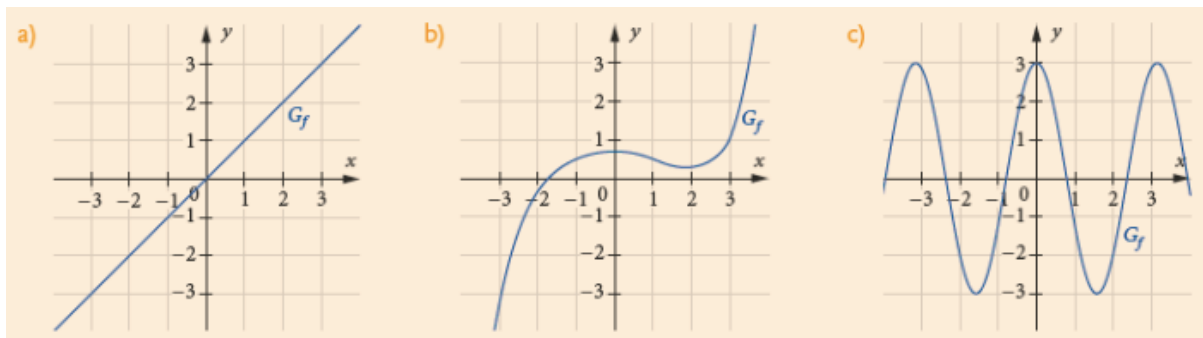
(mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$)

24.2 Die Graphen G_f und P schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. ⊗

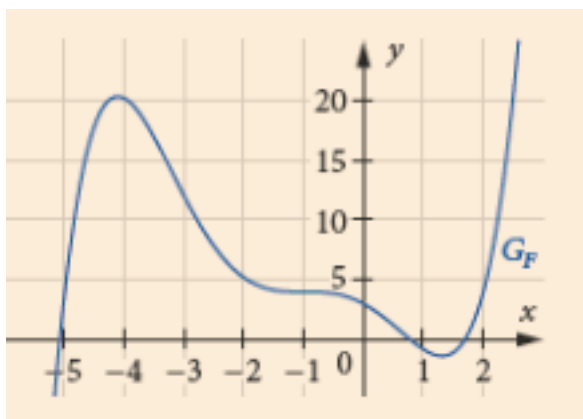
25 Ordnen Sie begründet den drei Funktionen f (Graphen der mittleren Reihe) jeweils eine Stammfunktion F (Graphen der oberen Reihe) sowie die ersten Ableitung f' (Graphen der unteren Reihe) zu. ○



- 26 Übertragen Sie den Graphen von f in Ihr Heft. Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f' und der Stammfunktion F . Es gilt: $P(0/0) \in G_f$. ☹

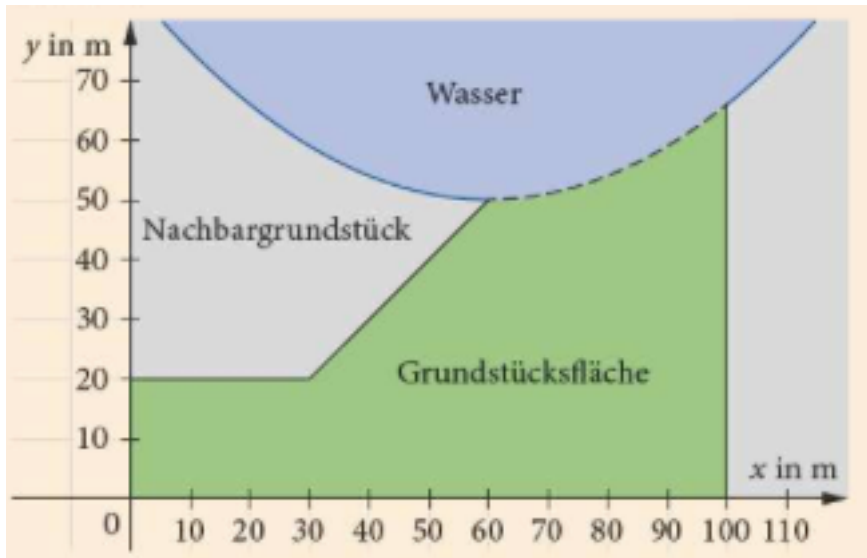


- 27.0 Betrachten Sie den untenstehenden Graphen G_F einer Stammfunktion F von f . Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. ☹



- 27.1 $f(-3) < 0$.
- 27.2 f hat genau drei Nullstellen.
- 27.3 f hat genau zwei Extremstellen.
- 27.4 G_f liegt in allen vier Quadranten.

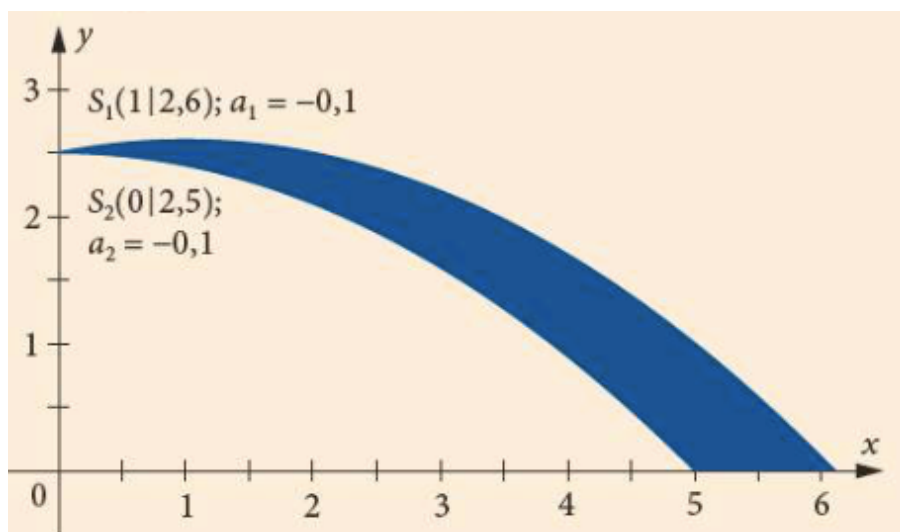
- 28 Einem Bauunternehmen wird das abgebildete Bauland zu einem Preis von 195000 € angeboten. Der durchschnittliche Quadratmeterpreis liegt derzeit bei 50 €.



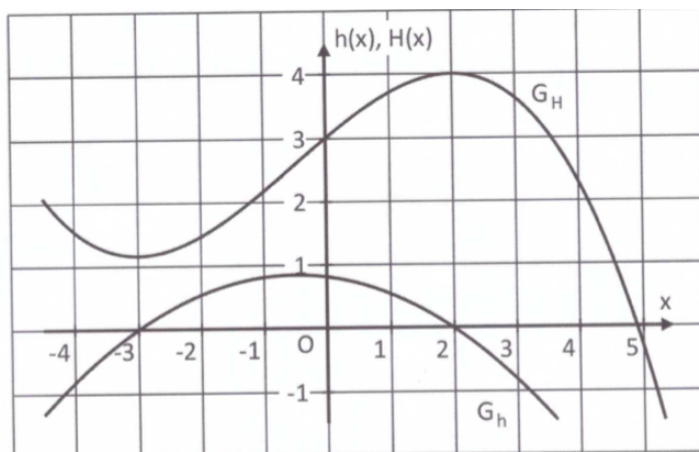
Ermitteln Sie, ob dem Bauunternehmer ein faires Angebot unterbreitet wurde, wenn die Grenzlinie zwischen der Grundstücksfläche und der Wasseroberfläche entlang der Randfunktion f mit $f(x) = 0,01x^2 - 1,2x + 86$ verläuft.

- 29 Das abgebildete Logo soll auf 10000 Turnschuhe gedruckt werden. Die Dichte der aufgetragenen Farbe ist $\rho = 0,75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und die Dicke der Farbschicht beträgt 0,5 mm.

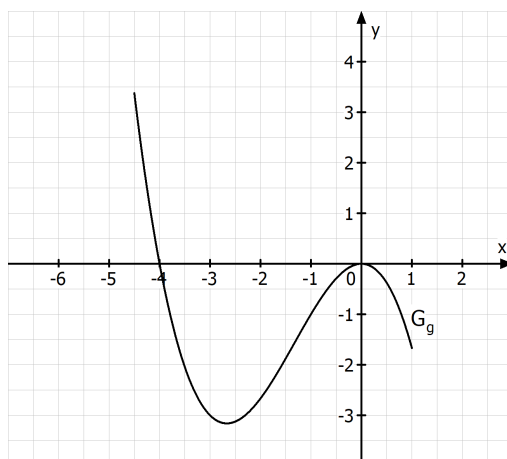
Ein Liter Farbe kostet 53,99 €. Madita soll die Kosten für die benötigte Farbe bestimmen und modelliert das Logo mithilfe quadratischer Funktionen. Helfen Sie Madita bei der Rechnung, indem Sie der Abbildung geeignete Werte entnehmen.



- 30 In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt. Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch. (Abitur 2019 Teil 1) ○



- 31 Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$ mit $D_g = [-4, 5; 1]$ und die x -Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2019 Teil 2 AI) ○



- 32 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung

$$w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$$

mit der Definitionsmenge $D_w = [0; 30]$ beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

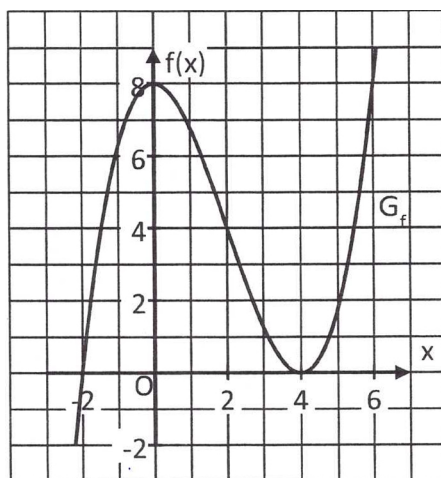
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

(Abitur 2019 Teil 2 All)

Berechnen Sie $\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} w(t) dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. 

- 33 Untenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f . Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind.
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1) 



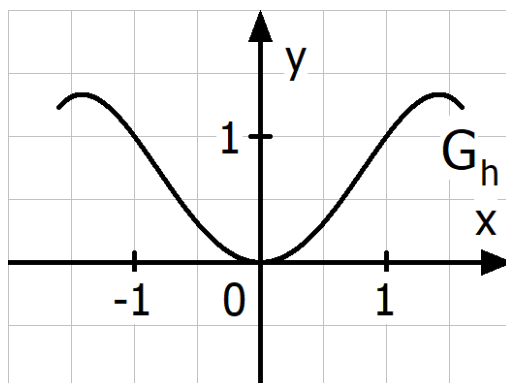
- A. Der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion von f hat an der Stelle $x = 4$ einen Extrempunkt.
- B. Für $0 < x < 4$ gilt $f'(x) < 0$.
- C. Der Graph G_F einer Stammfunktion von f ist im Intervall $[-1; 2]$ echt monoton steigend.
- D. Der Graph G_F einer Stammfunktion von f hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt.

34.0 Der Querschnitt einer Designer-Dachrinne wird durch den Graphen der Funktion

$h: x \mapsto -\frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^2$ mit der Definitionsmenge $D_h = [-1,6; 1,6]$ beschrieben (siehe

Skizze). x und y sind Längenangaben in der Einheit dm. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

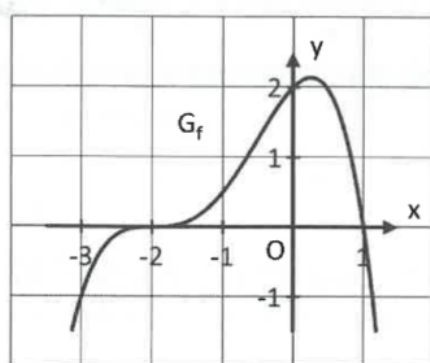
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)



34.1 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe $h_{\max}$ bezüglich des tiefsten Punktes der Dachrinne diese gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

34.2 Ermitteln Sie, welche Querschnittsfläche in dm^2 das Wasser ausfüllt, wenn es 1 dm hoch in der Dachrinne steht. Entnehmen Sie dazu geeignete ganzzahlige Werte aus der Zeichnung. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

35 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



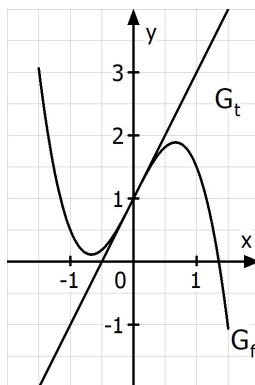
Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt.

(Abitur 2021 Teil 1)

- 36 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -1,5x^3 + 2x + 1$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und die Wendetangente t mit $t(x) = 2x + 1$ mit $D_t = \mathbb{R}$.

Der Graph G_f , die Tangente G_t und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in nachfolgender Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2021 AI)

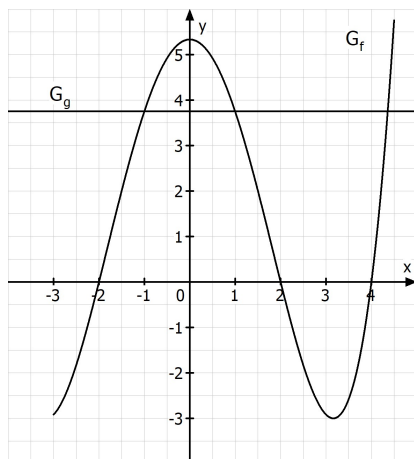


- 37 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und die lineare

Funktion $g: y = \frac{15}{4}$ mit $D_g = \mathbb{R}$.

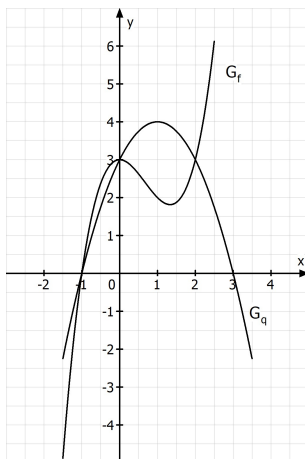
Die Graphen der beiden Funktionen f und g schneiden sich an den Stellen

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \sqrt{19}$ (Nachweis nicht erforderlich) und schließen somit zwei endliche Flächenstücke ein (siehe auch nachfolgende Zeichnung). Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2021 AII)



- 38 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und zusätzlich die Funktion $q: x \mapsto -x^2 + 2x + 3$ mit $D_q = \mathbb{R}$.

Die Graphen von G_f und G_q sind in nachfolgender Zeichnung in ein kartesisches Koordinatensystem eingezeichnet.



Berechnen Sie $\int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 q(x) dx$. Erläutern Sie begründet, ob damit bezüglich der beiden zugehörigen Graphen und der Koordinatenachsen die Maßzahl eines endlichen Flächenstücks beschrieben werden kann. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück gegebenenfalls in Ihrer obigen Zeichnung. 

- 39.0 Gegeben ist die lineare Funktion $g: x \mapsto 3x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2022 Teil 1)

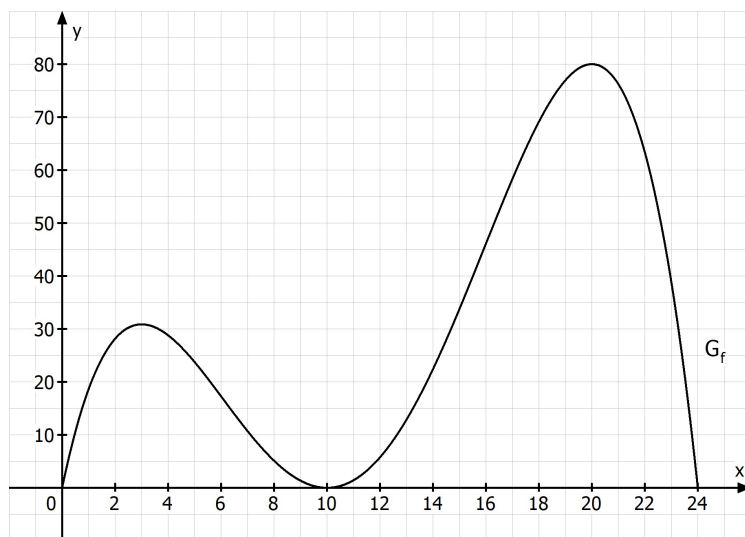
- 39.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem. 

- 39.2 Berechnen Sie $\int_0^2 g(x) dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich G_g . 

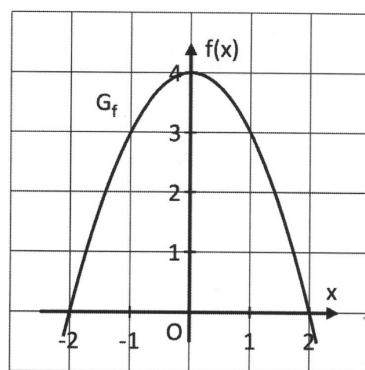
- 40 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge

$D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen zwei endliche Flächenstücke ein (siehe auch nachfolgende Abbildung). Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. (Abitur 2022 All) 



- 41.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. (Abitur 2023 Teil 1)



- 41.1 Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. 

- 41.2 Die Funktion F mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f .

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_F bezeichnet.

Beschreiben Sie den Globalverlauf des Graphen G_F mit Worten. Gehen Sie auch auf das Monotonieverhalten, die Lage und die Art der Extremstellen sowie auf die Lage der Wendestelle von F ein. 

- 42 Der Graph G_g der Funktion g mit $g(x) = -0,025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$ mit $D_g = \mathbb{R}$, die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 6$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2023 All) ○

- 43.0 Eine Familie ist schon seit längerem auf der Suche nach einem größeren Haus oder einem geeigneten Bauplatz. Sie wünschen sich grundsätzlich, dass das Haus eine möglichst große Grundfläche besitzt und sie hätte um das Haus herum gerne eine ebene Grundstücksfläche mit dem Inhalt von mehr als 300 m^2 , da sie einen großen Garten anlegen will.

Durch eine Erbschaft steht der Familie nun ein in Frage kommendes Grundstück an einem Bach zur Verfügung. Bevor sie einen Architekten mit der Planung beauftragt, fragt die Familie Sie um Rat, um herauszufinden, ob es sich überhaupt als Baugrund für ein Haus nach ihren Vorstellungen eignet.

Mithilfe eines Satellitenbildes aus dem Internet haben sie eine Skizze des Grundstücks angefertigt.

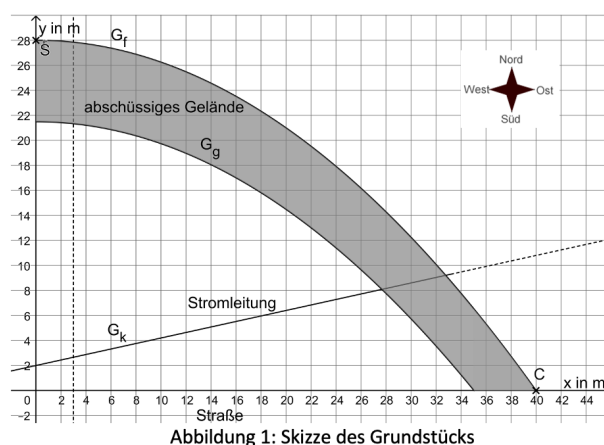


Abbildung 1: Skizze des Grundstücks

Um das Grundstück beschreiben zu können, wurde ein Koordinatensystem eingeführt. In diesem Koordinatensystem lässt sich der Bachverlauf, der den oberen Grundstücksrand darstellt, annähernd durch den Graphen einer quadratischen Funktion mit dem Scheitel $S(0|28)$ beschreiben. Im Osten liegt ein Grenzstein bei $C(40|0)$. Im Süden wird das Grundstück durch eine Dorfstraße und im Westen durch ein benachbartes Grundstück begrenzt. Die Dorfstraße verläuft entlang der x-Achse und die westliche Grundstücksgrenze entlang der y-Achse des eingeführten Koordinatensystems. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Ein Teil des Grundstücks zum Bach hin fällt stark ab. Auf diesem abschüssigen Gelände ist keine Bebauung möglich. Das abschüssige Gelände wird neben dem Bach durch eine gedachte Linie begrenzt, die annähernd denselben Verlauf hat wie der Bach. Ihr Scheitel liegt 6,5 Meter weiter südlich von S. Eine weitere Einschränkung ergibt sich dadurch, dass sich im südlichen Teil des Grundstücks eine unterirdische Stromleitung befindet, die nicht mit einem Gebäude überbaut werden darf und deren Verlauf sich durch den Graphen der Funktion k mit der Funktionsgleichung $k(x) = 0,22x + 2$ auf einer geeigneten Definitionsmenge beschreiben lässt. Laut Bebauungsplan muss die südliche Hauskante parallel zur Dorfstraße sein. Der vorgeschriebene Mindestabstand zum Nachbargrundstück und zur Straße beträgt

jeweils drei Meter. (Illustrierende Aufgabe zum LehrplanPlus)

43.1 Ermitteln Sie, ob das Grundstück aufgrund der Vorstellungen der Familie und der Bauvorschriften geeignet ist. 

43.2 Bestimmen Sie, ob noch genügend ebene Fläche für einen Garten zur Verfügung steht. 

44 Gegeben ist die quadratische Funktion $p: x \mapsto -x^2 + 1$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_p bezeichnet.

Der Graph G_p und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2024 Teil 1) 

45.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

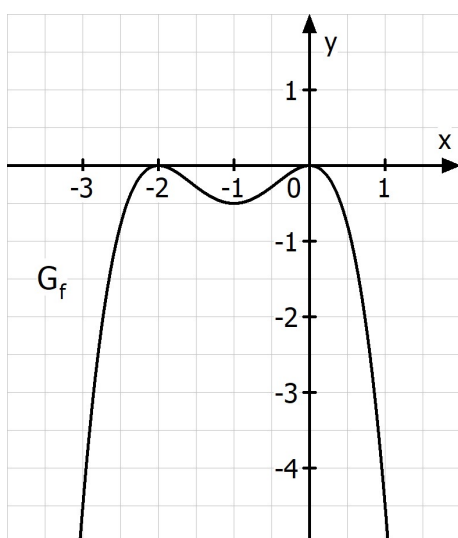
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$

besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Scheitelpunkt $S(-1|-1,5)$ und schneidet den Graphen G_f in den Punkten $A(-3|-4,5)$ und $B(1|-4,5)$.

45.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p und zeichnen Sie die zugehörige Parabel für $-3 \leq x \leq 1$ in untenstehendes Koordinatensystem ein. (Abitur 2024 AI) 

(mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$)



45.2 Die beiden Graphen G_f und G_p schließen ein endliches Flächenstück ein.

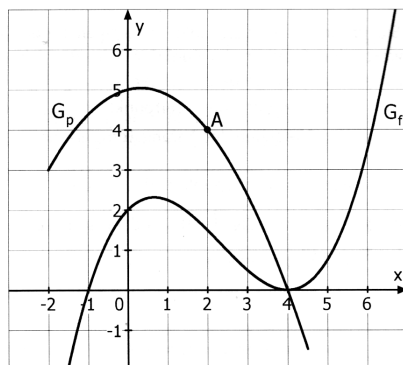
Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts des beschriebenen Flächenstücks. ○

46.0 Die Abbildung zeigt ausschnittsweise den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f

dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und den Graphen G_p der

quadratischen Funktion $p: x \mapsto -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$.

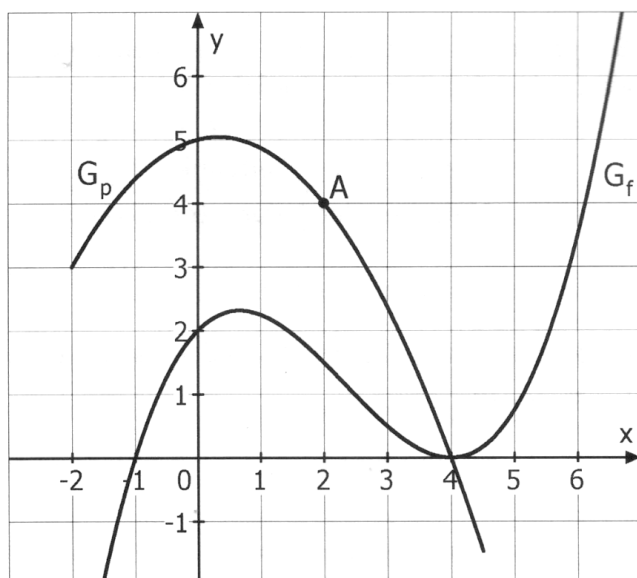
(Abitur 2024 All)



46.1 Entnehmen Sie der Abbildung aus 46.0 geeignete ganzzahlige Werte und bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f . ⚡

46.2 G_p (siehe Abbildung oben) und die Gerade G_h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x + 2$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ schneiden sich im Punkt $A(2|4)$.

Zeichnen Sie die Gerade G_h in die obige Abbildung ein und schraffieren Sie das Flächenstück, das durch G_p , G_h und die y -Achse im I. Quadranten des Koordinatensystems eingeschlossen wird. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. ⚡

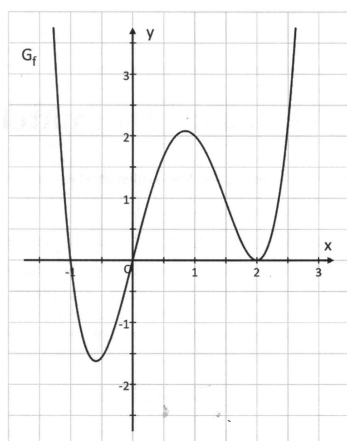


47 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto x^5 - 4x^3$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

Geben Sie einen Wert für b mit $b \in \mathbb{R}$ und $b \neq -1$ an, so dass gilt: $\int_{-1}^b k(x) dx = 0$.

Begründen Sie Ihre Wahl. (Abitur 2025 Teil 1) 

48.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f . (Abitur 2025 Teil 1)



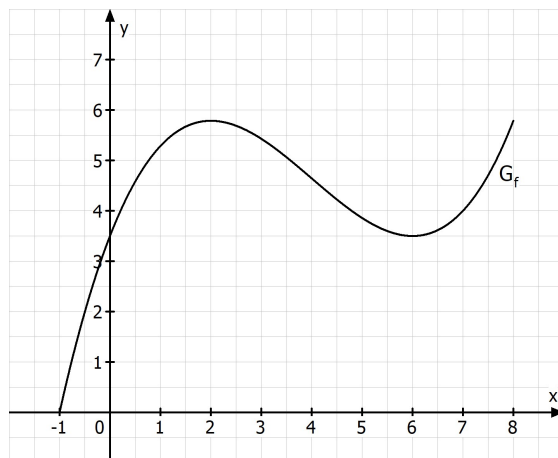
48.1 Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an. 

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -0,5 BE und nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
$f''(-1) > 0$			
$f'(2) = f(2)$			
Die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle $x = -0,5$ ist negativ.			
F hat genau drei Nullstellen.			

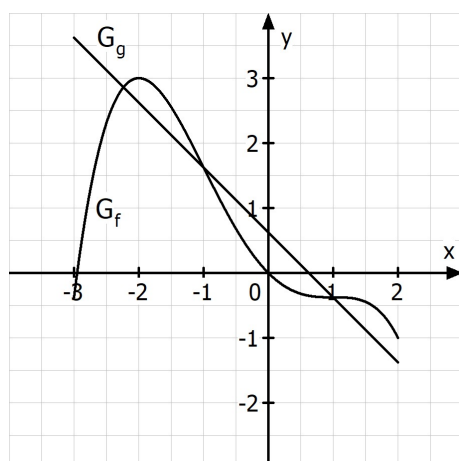
48.2 Skizzieren Sie in das gegebene Koordinatensystem von 48.0 einen möglichen Graphen der Stammfunktion F , welcher durch den Koordinatenursprung verläuft. Aus Ihrer Skizze soll – sofern vorhanden – Extrem- und Wendestellen des Graphen von F klar ersichtlich sein. 

- 49 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ (siehe auch nachfolgende Abbildung).



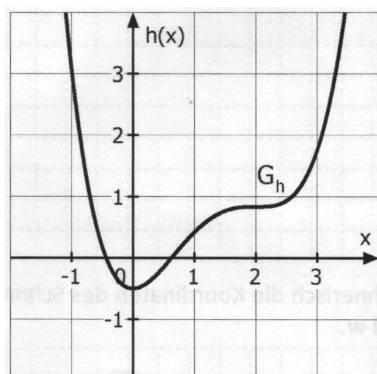
Der Graph der Funktion f und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ schließen zusammen mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Abbildung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2025 AI) ☐

- 50 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$ und die Gerade g mit $g(x) = -x + \frac{5}{8}$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$ (siehe folgende Abbildung).



Die Gerade G_g schließt mit G_f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in der obigen Abbildung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2025 AII) ☐

- 51 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion h vierten Grades. Die Funktion H bezeichne eine Stammfunktion von h .



Setzen Sie jeweils eines der drei mathematischen Symbole „<“, „>“ oder „=“ in das Kästchen ein, so dass eine wahre Aussage entsteht. (Abitur 2026 Teil 1)

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Symbol ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

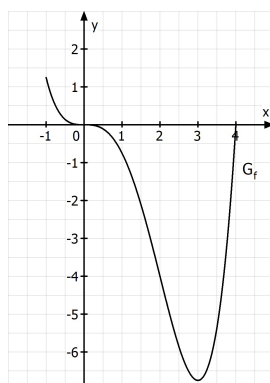
a) $h'(x) \boxed{\phantom{< > =}} 0$ für $x < 0$

b) $h''(2) \boxed{\phantom{< > =}} 0$

c) $\int_0^2 h(x) dx \boxed{\phantom{< > =}} 0$

d) $H'(2) \boxed{\phantom{< > =}} 0$

- 52.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 4x^3)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet und ist in nachfolgender Zeichnung dargestellt. (Abitur 2026 AI)



- 52.1 Berechnen Sie $\int_{-1}^4 f(x) dx$. Erklären Sie, welche geometrische Bedeutung das Ergebnis bezüglich G_f hat. Veranschaulichen Sie Ihre Erklärung in der Abbildung in 52.0.

52.2 Betrachtet wird nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = f(x) + 7 = \frac{1}{4}(x^4 - 4x^3) + 7.$$

Begründen Sie ohne Rechnung, weshalb der Graph der Funktion g keine Nullstelle

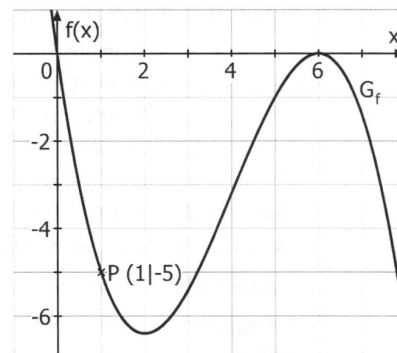
besitzt. Ermitteln Sie auch $\int_1^3 (g(x) - f(x)) dx$. 

53 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit

$$f(x) = -0,2x^3 + 2,4x^2 - 7,2x \text{ und } D_f = \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein.

Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. 
(Abitur 2026 All)



Lösungen

1 Bestimmung der Nullstellen von $f: \frac{1}{2}x - a = 0 \Rightarrow x = 2a$

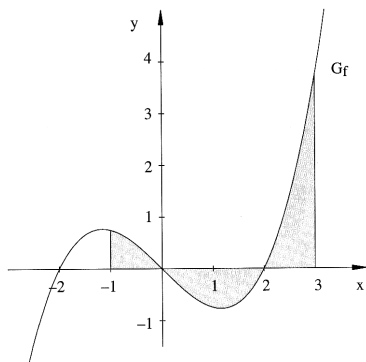
$$\Rightarrow \int_0^{2a} \left(\frac{1}{2}x - a\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - ax\right]_0^{2a} = \left[\frac{1}{4}(2a)^2 - a \cdot 2a\right] - 0 = a^2 - 2a^2 = -a^2$$

$$\Rightarrow A = a^2 \quad \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ oder } a = -3$$

Erläuterung:

Bei der Berechnung des bestimmten Integrals muss immer etwas Negatives herauskommen, weil für $a > 0$ die Fläche unterhalb der x-Achse liegt und für $a < 0$ von 0 bis zu einer negativen Grenze integriert wird.

2

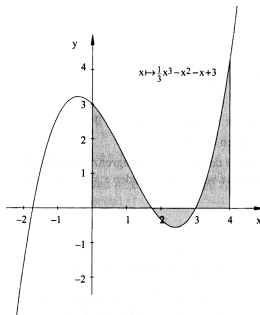


$$F(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx + \left| \int_0^2 f(x) dx \right| + \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \frac{7}{16} + 1 + \frac{25}{16} = 3$$

3



Berechnung der Nullstellen ergibt: $x = 3$ und $x = \pm\sqrt{3}$;

$$\text{Stammfunktion } F(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx + \left| \int_{\sqrt{3}}^3 f(x) dx \right| + \int_3^4 f(x) dx =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{4}\right) + (2\sqrt{3} - 3) + (1,75) \approx 4,95$$

4 Bestimmung der Schnittstellen (=Integrationsgrenzen) von G_f und G_h :

$$\frac{4}{3}(-x^3 - 3x^2 + 2) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3} \Rightarrow -x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$$

Durch Ausprobieren: $x = 1$

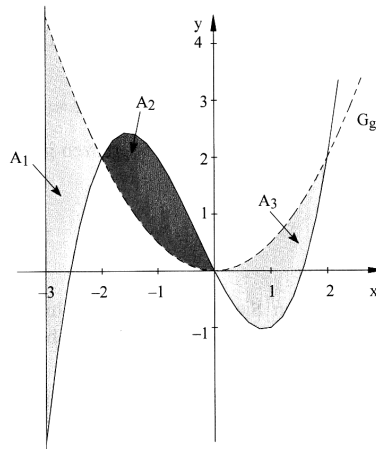
Polynomdivision: $(-x^3 - 3x^2 + x + 3) : (x - 1) = -x^2 - 4x - 3$

Weitere Nullstellen: $-x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ und $x = -3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \int_{-1}^1 (f(x) - h(x)) dx = \int_{-1}^1 (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^1 = \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \right] = \\ &= \left[2\frac{1}{4} \right] - \left[-1\frac{3}{4} \right] = 4 \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (p(x) - f(x)) dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 2x \right) dx = \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{1}{36} \cdot (3)^4 - \frac{1}{3} \cdot (3)^3 + (3)^2 \right] - 0 = 2,25 \end{aligned}$$



6

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{-3}^{-2} [g(x) - f(x)] dx = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right) dx \\
 &= \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{-2} = \left[-\frac{1}{8}x^4 + x^2 \right]_{-3}^{-2} \\
 &= -\frac{1}{8} \cdot 16 + 4 - \left(-\frac{1}{8} \cdot 81 + 9 \right) = -2 + 4 + \frac{81}{8} - 9 = \frac{81}{8} - 7 \\
 &= \frac{81}{8} - \frac{56}{8} = \frac{25}{8} \text{ [FE]} \\
 A_2 &= \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\
 &= \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}x^3 - 2x \right] dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - (2 - 4) = 2 \text{ [FE]} \\
 A_3 &= \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \left[-\frac{1}{8}x^4 + x^2 \right]_0^2 = -2 + 4 = 2 \text{ [FE]} \\
 A &= A_1 + A_2 + A_3 = \frac{25}{8} + 2 + 2 = \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8} \text{ [FE]}
 \end{aligned}$$

7 Bestimmung der Schnittstellen (=Integrationsgrenzen):

$$p(x) = f(x) \Rightarrow -x^2 + 4x - 6 = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2) \Rightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 7x - \frac{20}{3} = 0$$

 $x = 1$ durch Ausprobieren

$$\text{Polynomdivision: } \left(-\frac{1}{3}x^3 + 7x - \frac{20}{3} \right) : (x-1) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$$

$$\text{Weitere Nullstellen: } -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ und } x = 4$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A &= \int_1^4 (p(x) - f(x)) dx = \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 7x - \frac{20}{3} \right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{20}{3}x \right]_1^4 = \\
 &= \left[-\frac{1}{12} \cdot (4)^4 + \frac{7}{2} \cdot (4)^2 - \frac{20}{3} \cdot 4 \right] - \left[-\frac{1}{12} \cdot (1)^4 + \frac{7}{2} \cdot (1)^2 - \frac{20}{3} \cdot 1 \right] = [8] - \left[-3\frac{1}{4} \right] = 11\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$8 \quad \frac{1}{8}(x-4)^2(x+k) = \frac{1}{8}x^3 + \left(\frac{1}{8}k-1\right)x^2 + (2-k)x + 2k$$

Für die Stammfunktion $F(x)$ gilt:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{8}x^3 + \left(\frac{1}{8}k-1\right)x^2 + (2-k)x + 2k \right) dx =$$

$$\frac{1}{32}x^4 + \left(\frac{1}{24}k - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{k}{2}\right)x^2 + 2kx + C$$

Es muss gelten:

$$(I) \quad F_k''(0) = 0$$

$$(II) \quad F_k(0) = 0$$

$$F_k''(x) = f_k'(x) = \frac{3}{8}x^2 + \left(\frac{1}{4}k - 2\right)x + 2 - k$$

$$(I) \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$$

$$(II) \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow F_2(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 4x$$

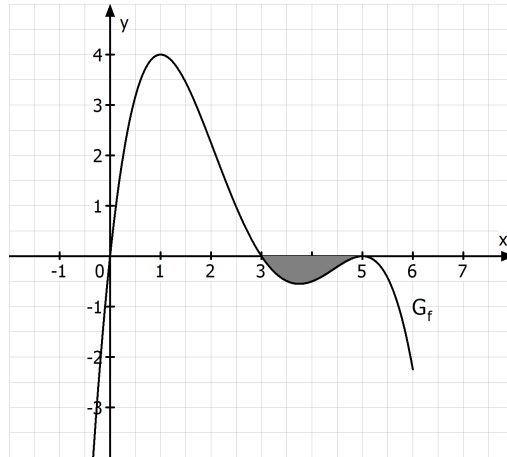
$$9 \quad F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 9 \right) dx = \frac{1}{45}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 9x + C$$

Es muss gelten:

$$F(-3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{45} \cdot (-3)^5 - \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 + 9 \cdot (-3) + C = 0$$

$$C = 14 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{45}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 9x + 14,4$$

10



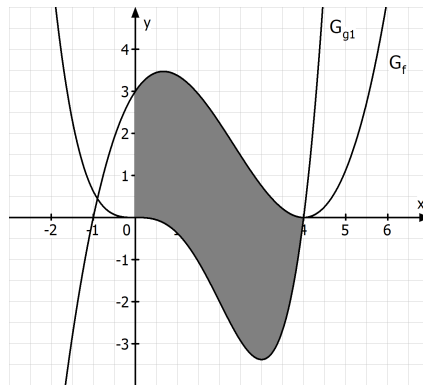
Nullstellen von f bestimmen: $-\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2=0 \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=3 \quad x_3=5$

$$\int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 \left[-\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x) \right] dx =$$

$$\left[-\frac{1}{8} \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{13}{4}x^4 + \frac{55}{3}x^3 - \frac{75}{2}x^2 \right) \right]_3^5 = -\frac{1}{8} \left[-52\frac{1}{12} - (-57\frac{3}{20}) \right] = -\frac{19}{30}$$

$$\Rightarrow A = \frac{19}{30} \text{ FE} \approx 0,63 \text{ FE}$$

11



$$f(4) = \frac{3}{16}(4^3 - 7 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 + 16) = 0$$

$$g_1(4) = \frac{1}{8} \cdot 4^4 - \frac{1}{2} \cdot 4^3 = 0$$

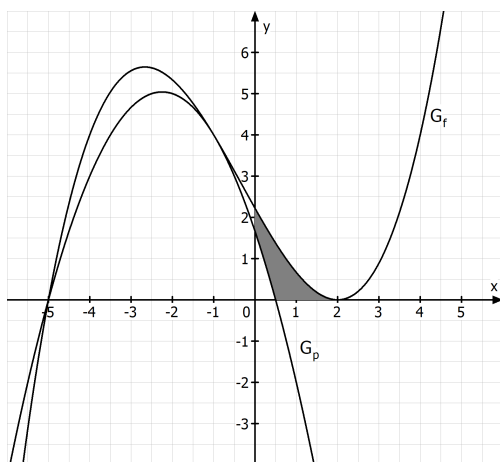
$\Rightarrow f$ und g_1 haben bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt

$$A = \int_0^4 (f(x) - g_1(x)) dx = \int_0^4 \left[\left(\frac{3}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 \right) - \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right) \right] dx =$$

$$\int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^4 + \frac{11}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 \right) dx = \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{11}{64}x^4 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x \right]_0^4 =$$

$$= -25\frac{3}{5} + 44 - 28 + 12 + 12 - 0 = 14\frac{2}{5} \text{ FE}$$

12



Schnittstellen bestimmen:

$$\frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{9}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{5}{9} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \quad x_1 = -1 \text{ (durch Ausprobieren)}$$

$$\Rightarrow (x^3 + 7x^2 + 11x + 5) : (x + 1) = x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 5) = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \quad x_3 = -5$$

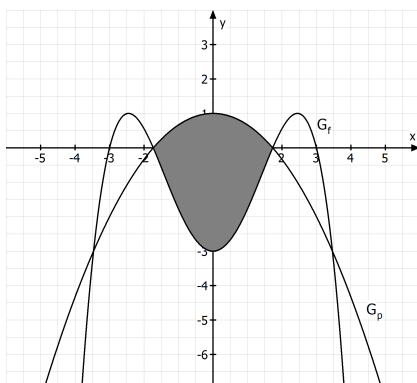
$$\int_0^2 f(x) dx - \int_0^{0.5} p(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20) dx - \int_0^{0.5} \left(-\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{9} \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 20x \right) \right]_0^2 - \left[-\frac{2}{9}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x \right]_0^{0.5} =$$

$$= \left[\frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 \right) - 0 \right] - \left[-\frac{2}{9} \cdot (0.5)^3 - \frac{3}{2} \cdot (0.5)^2 + \frac{5}{3} \cdot 0.5 - 0 \right] =$$

$$= \frac{44}{27} - \frac{31}{72} = \frac{259}{216} \approx 1,20 \Rightarrow A \approx 1,20$$

13.1



Nullstellen von f: $f(x)=0$

Substitution: $z = x^2$

$$\Rightarrow -\frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{3}z - 3 = 0 \Rightarrow z^2 - 12z + 27 = 0 \Rightarrow (z-3)(z-9) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = 3 \quad z_2 = 9$$

Resubstitution:

$$1) x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}$$

$$2) x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = -3 \quad x_4 = 3$$

Nullstellen von p: $p(x)=0$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow f$ und p haben genau zwei gemeinsame Nullstellen bei $x_1 = -\sqrt{3}$ und $x_2 = \sqrt{3}$.

13.2

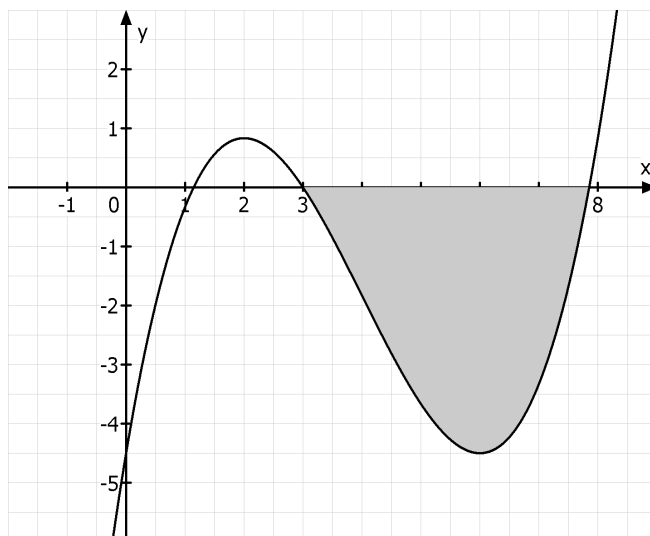
$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (p(x) - f(x)) dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{1}{3}x^2 + 1\right) - \left(-\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3\right) \right] dx = \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4 \right) dx = \left[\frac{1}{45}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + 4x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \left[\frac{1}{45}(\sqrt{3})^5 - \frac{5}{9}(\sqrt{3})^3 + 4(\sqrt{3}) \right] - \left[\frac{1}{45}(-\sqrt{3})^5 - \frac{5}{9}(-\sqrt{3})^3 + 4(-\sqrt{3}) \right] \approx \\ &\approx 4,39 - (-4,39) \approx 8,78 \end{aligned}$$

13.3

$$A_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{Abfall}} = 8\sqrt{3} - 8,78 \approx 5,08$$

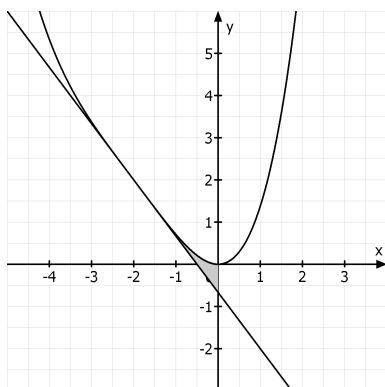
$$\Rightarrow \frac{A_{\text{Abfall}}}{A_{\text{Rechteck}}} = \frac{5,08}{8\sqrt{3}} \approx 0,3663 \Rightarrow \text{Der Abfall beträgt ca. 36,64\%}$$

14

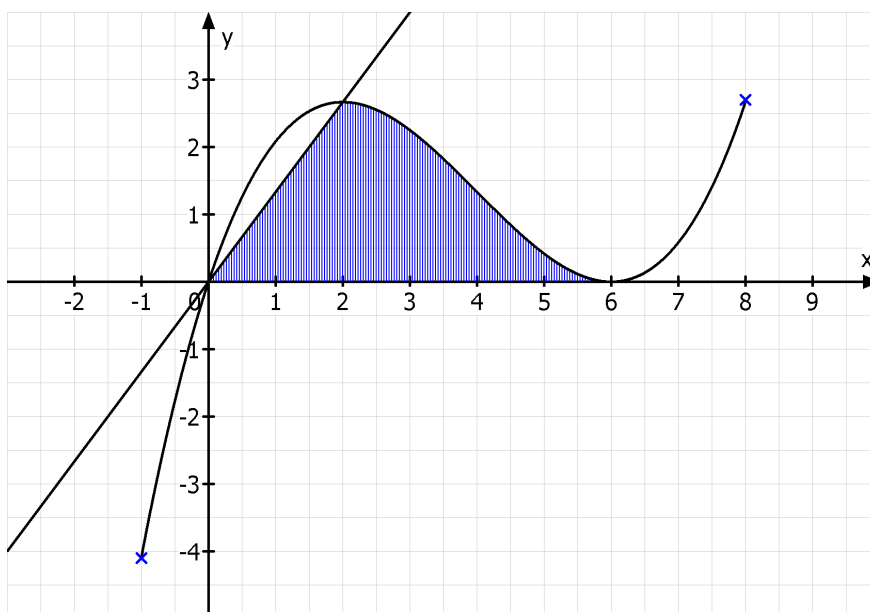


$$\begin{aligned}
 A &= - \int_3^{7,85} f(x) dx = - \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 27x \right) \right]_3^{7,85} = \\
 &= \left[-\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \cdot 7,85^4 - 4 \cdot 7,85^3 + 18 \cdot 7,85^2 - 27 \cdot 7,85 \right) \right] - \left[-\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 - 27 \cdot 3 \right) \right] \\
 &\approx 14,73 - 1,125 \approx 13,605 \approx 13,61
 \end{aligned}$$

15



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^0 (f(x) - t(x)) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + x^2 + \frac{4}{3} x + \frac{2}{3} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{120} x^5 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^2 + \frac{2}{3} x \right]_{-2}^0 = \\
 &= 0 - \left(\frac{1}{120} \cdot (-2)^5 + \frac{1}{12} \cdot (-2)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-2)^2 + \frac{2}{3} \cdot (-2) \right) = 0 - \left(-\frac{4}{15} \right) = \frac{4}{15}
 \end{aligned}$$



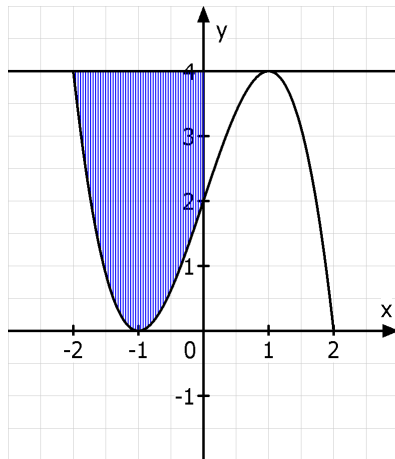
$$A_1 = \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 \frac{4}{3} x dx = \left[\frac{2}{3} x^2 \right]_0^2 = \frac{2}{3} \cdot 2^2 - 0 = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_2^6 f(x) dx = \int_2^6 \left(\frac{1}{12} x^3 - x^2 + 3x \right) dx = \left[\frac{1}{48} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_2^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{48} \cdot 6^4 - \frac{1}{3} \cdot 6^3 + \frac{3}{2} \cdot 6^2 \right) - \left(\frac{1}{48} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 \right) = 9 - \frac{11}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8$$

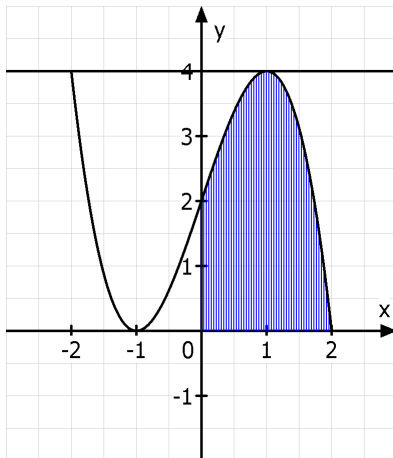
17.1



$$F_1 = \int_{-2}^0 \left(4 - (-x^3 + 3x + 2) \right) dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^0 =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right) = 0 - (-6) = 6$$

17.2



$$F_2 = \int_0^2 (-x^3 + 3x + 3) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1,5x^2 + 2x \right]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1,5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 0 = 6$$

$\Rightarrow F_1$ und F_2 sind gleich groß;

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(0/2)$;

18 s kann Stammfunktion von f sein ($s'(x)=r(x)$), weil das Monotonieverhalten von s mit den Vorzeichen von r übereinstimmt und weil an der Stelle $x = -1$ s einen TEP und r eine doppelte Nullstelle besitzt und weil an der Stelle $x = 2$ s einen HOP und r eine einfache Nullstelle mit VZW von + nach – besitzt.

19

$$A = \int_0^4 (f(x) - t(x)) dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + x^2 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \left(-16 + \frac{64}{3} \right) - 0 = \frac{16}{3}$$

20

$$A = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{100}x^5 - \frac{2}{15}x^3 + \frac{4}{5}x \right]_{-2}^2 = \frac{64}{75} - \left(-\frac{64}{75} \right) = \frac{128}{75} \approx 1,71$$

21

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{6}x^3 - x^2 = 0,5x^2 - 2x \Rightarrow \frac{1}{6}x^3 - 1,5x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}x(x^2 - 9x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9 + \sqrt{33}}{2} \quad x_3 = \frac{9 - \sqrt{33}}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{9 - \sqrt{33}}{2}} \left(\frac{1}{6}x^3 - 1,5x^2 + 2x \right) dx = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 \right]_0^{\frac{9 - \sqrt{33}}{2}}$$

$$\approx (0,29 - 2,16 + 2,65) - 0 \approx 0,78$$

22.1

$$p''(x)=1 \Rightarrow p'(x)=x+c \Rightarrow p(x)=\frac{1}{2}x^2+cx+d$$

$$(I) p'(-\frac{1}{8})=0 \Rightarrow -\frac{1}{8}+c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{8}$$

$$(II) p(-4)=8 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{8} \cdot (-4) + d = 8 \Rightarrow d=0,5$$

$$\Rightarrow p(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$$

22.2

$$\frac{1}{8}(x^3+2x^2-7x+4)=\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{4}x+1)$$

$$x^3+2x^2-7x+4=4x^2+x+4 \Rightarrow x^3-2x^2-8x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2-2x-8)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x+2)(x-4)=0 \Rightarrow x_2=-2 \quad x_3=4$$

$$\Rightarrow SP_1(0/0,5) \quad SP_2(4/9) \quad SP_3(-2/2,25)$$

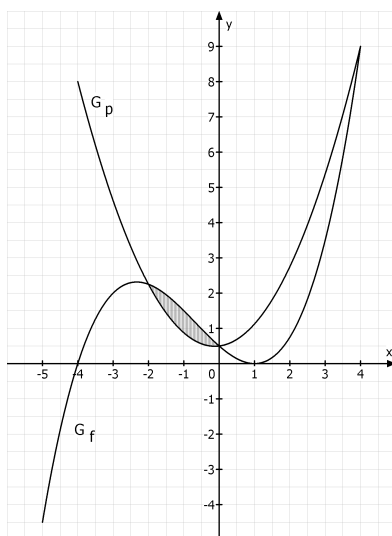
Zeichnung siehe 22.4

22.3

$$p(x)-f(x)>0 \Rightarrow x \in]-\infty;-2[\cup]0;4[$$

In diesen Intervallen verläuft G_p oberhalb von G_f .

22.4



$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - p(x)) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - \left(0,5 + \frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{5}{6}$$

23.1

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(I) \quad 36a - 6b + c = 6$$

$$(II) \quad 4a - 2b + c = -2$$

$$(III) \quad a + b + c = 2,5$$

$$(I) - (II): 32a - 4b = 8 \quad (IV)$$

$$(II) - (III): 3a - 3b = -4,5 \quad (V)$$

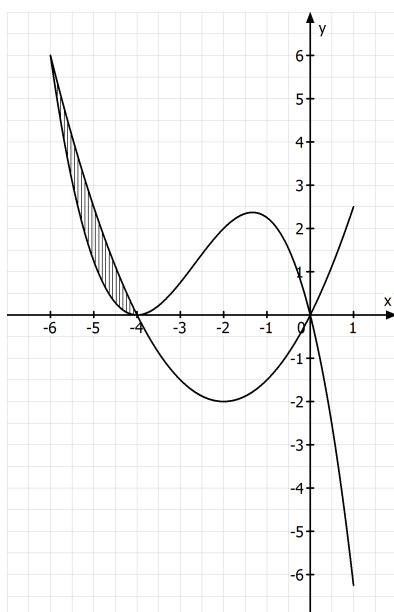
$$3 \cdot (IV) - 4 \cdot (V): 84a = 42 \Rightarrow a = 0,5$$

$$(V) \Rightarrow 3 \cdot 0,5 - 3b = -4,5 \Rightarrow b = 2$$

$$(III) \Rightarrow 0,5 + 2 + c = 2,5 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = 0,5x^2 + 2x$$

23.2



23.3

$$A = \int_{-6}^{-4} (p(x) - f(x)) dx = \int_{-6}^{-4} \left[(0,5x^2 + 2x) - \left(-\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 - 4x \right) \right] dx =$$

$$\int_{-6}^{-4} \left(\frac{1}{4}x^3 + 2,5x^2 + 6x \right) dx = \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 3x^2 \right]_{-6}^{-4} = \frac{32}{3} - 9 = \frac{5}{3}$$

24.1

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad p'(x) = 2ax + b$$

$$(I) \quad p(-4) = 4 \Rightarrow 16a - 4b + c = 4$$

$$(II) \quad p'(-4) = 0 \Rightarrow -8a + b = 0$$

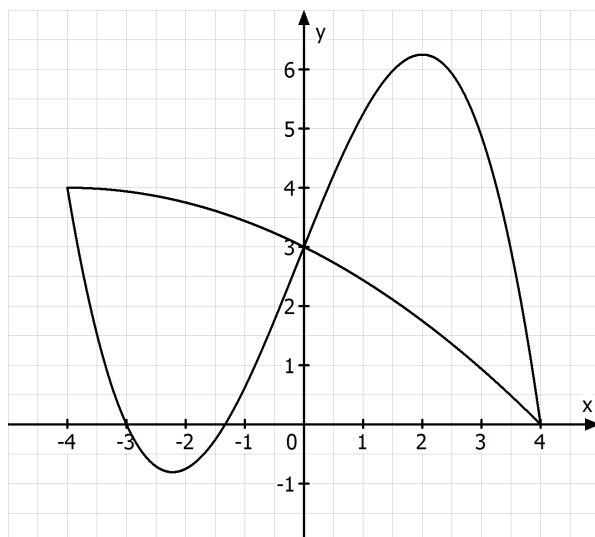
$$(III) \quad p(0) = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$(I) \Rightarrow 16a - 4b = 1$$

$$2 \cdot (II) + (I): -2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$(II) \Rightarrow -8a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$



24.2

$$A = \int_{-4}^0 (p(x) - f(x)) dx = \int_{-4}^0 \left[\left(-\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \right) - \left(-\frac{3}{16}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + 2,5x + 3 \right) \right] dx =$$

$$= \int_{-4}^0 \left(\frac{3}{16}x^3 - 3x \right) dx = \left[\frac{3}{64}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-4}^0 = 0 - (-12) = 12$$

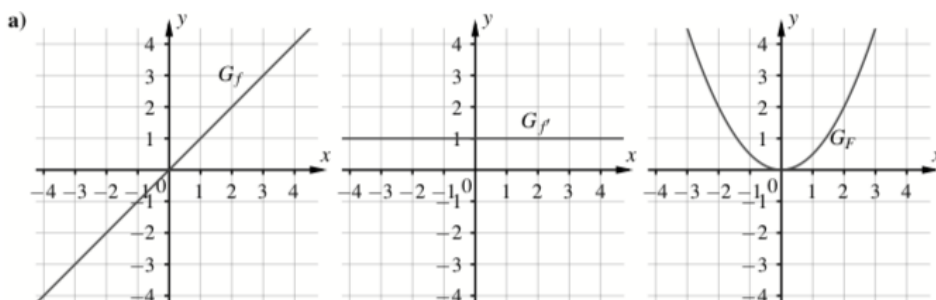
25

$$f:a \quad F:3 \quad f':4$$

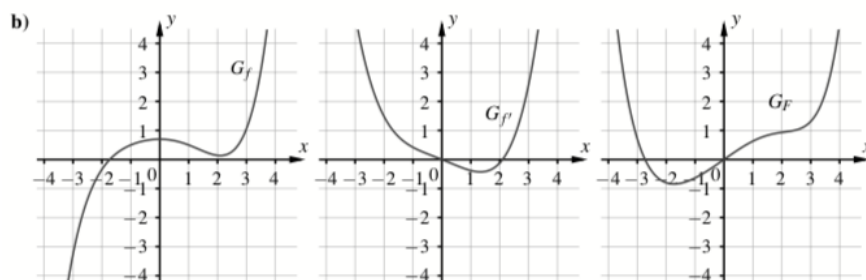
$$f:b \quad F:1 \quad f':6$$

$$f:c \quad F:2 \quad f':5$$

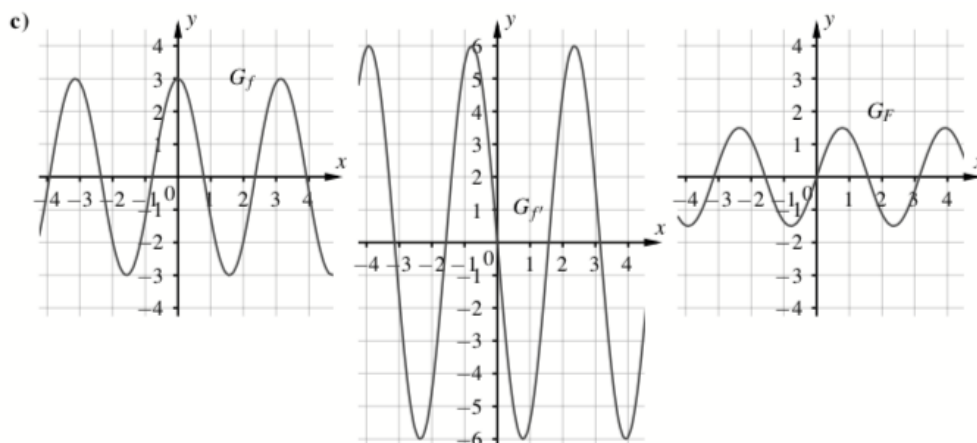
26a)



26b)



26c)



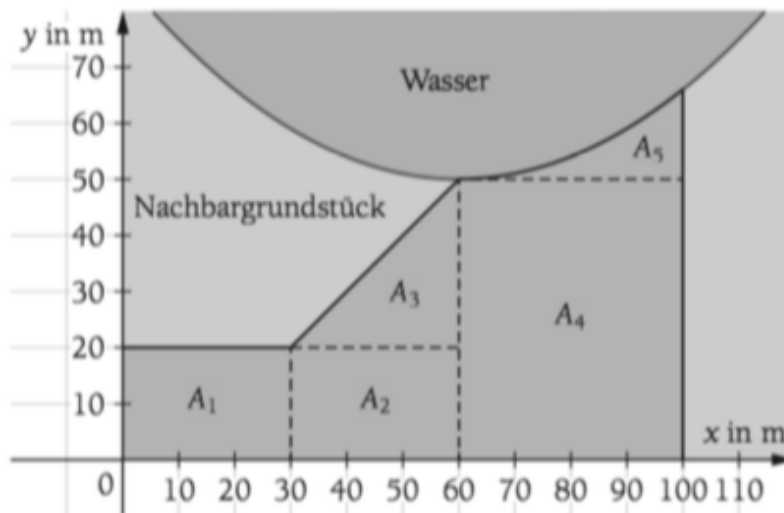
27.1 Wahr, da F an der Stelle -3 monoton fallend ist.

27.2 Wahr, da F drei Stellen mit waagrechter Tangente haben.

27.3 Falsch, da F drei Wendestellen und damit f drei Extrempunkte hat.

27.4 Wahr, da F im Intervall $[-4,1;1,3]$ monoton fallend und außerhalb monoton steigend ist.

28



$$A_1 = 30 \cdot 20 = 600 = A_2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 450$$

$$A_4 + A_5 = \int_{60}^{100} (0,01x^2 - 1,2x + 86) dx = \left[\frac{1}{300}x^3 - 0,6x^2 + 86x \right]_{60}^{100} \approx 2213,33$$

$$\Rightarrow A_{\text{gesamt}} = 600 + 600 + 450 + 2213,33 = 3863,33 \text{ m}^2$$

$$\text{Kosten: } 3863,33 \cdot 50 = 193166,65$$

Das Kaufangebot ist fair.

29

$$p_1(x) = -0,1(x-1)^2 + 2,6 = -0,1x^2 + 0,2x + 2,5$$

$$p_2(x) = -0,1x^2 + 2,5$$

$$-0,1x^2 + 0,2x + 2,5 = 0 \Rightarrow x_1 = 6,1 \quad x_2 = -4,1$$

$$-0,1x^2 + 2,5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = 5$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{6,1} (-0,1x^2 + 0,2x + 2,5) dx - \int_0^5 (-0,1x^2 + 2,5) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{30}x^3 + 0,1x^2 + 2,5x \right]_0^{6,1} - \left[-\frac{1}{30}x^3 + 2,5x \right]_0^5 = 11,405 - 8,333 = 3,072 \end{aligned}$$

$$\text{Kosten: } 10000 \cdot 3,072 \cdot 0,05 \cdot 0,05399 = 82,93 \text{ €}$$

30 $H(2) - H(0) = 4 - 3 = 1$

Der Wert ist die Maßzahl des Flächeninhalts, den G_h mit der y-Achse im Bereich $[0;2]$ einschließt.

$$31 \quad A = - \int_{-4}^0 g(x) dx = - \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{9}x^3 \right]_{-4}^0 = - \left[(0) - \left(\frac{64}{9} \right) \right] = \frac{64}{9}$$

$$32 \quad \frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} w(t) dt = \frac{1}{30} \left[-\frac{1}{500} \cdot \left(\frac{1}{5}t^5 - 8t^4 - 100000t \right) \right]_0^{30} = \frac{1}{30} \cdot 9240 = 308$$

Der durchschnittliche Wasserstand im gesamten Beobachtungszeitraum der 30 Tage lag bei 308 cm.

33

A. Falsch. G_f hat bei $x = 4$ einen Extrempunkt $\Rightarrow G_{f'}$ hat bei $x = 4$ eine Nullstelle

B. Richtig. G_f ist in $[0;4]$ smf

C. Richtig. G_f sms in $[-1;2]$ $\Rightarrow F' = f > 0$ in $[-1;2]$

D. Richtig. Wendepunkte von G_f sind die Extrempunkte von $G_{f'} = G_f$

34.1

$$h'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x$$

$$-\frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 = 2 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2}$$

Skizze von h' :

$$\Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ HOP} \quad x = 0 \text{ TIP} \quad x = \sqrt{2} \text{ HOP}$$

$$h(\pm\sqrt{2}) = \frac{4}{3} \quad h(0) = 0$$

$$\Rightarrow h_{\max} = \frac{4}{3} \text{ dm}$$

34.2

Schnittstellen zwischen G_h und $y=1$: $x=-1$ $x=1$ (aus Zeichnung)

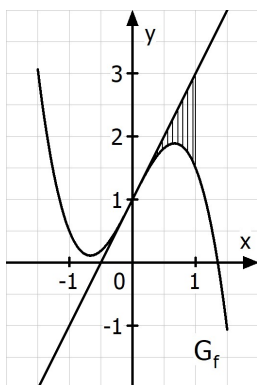
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-1}^1 (1-h(x)) dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 1 \right) dx = \left[\frac{1}{15}x^5 - \frac{4}{9}x^3 + x \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{28}{45} - \left(-\frac{28}{45} \right) = \frac{56}{45} \approx 1,24 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

35

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x \right) \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} + 2 - 2 - 8 \right) - 0 = -\frac{1}{4} \cdot (-6,55) = 1,6375$$

36



$$A = \int_0^1 (t(x) - f(x)) dx = \int_0^1 1,5x^3 dx = \left[\frac{3}{8}x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{8} - 0 = \frac{3}{8}$$

37

$$A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{19}{12} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{19}{12}x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{47}{45} \right) - \left(-\frac{47}{45} \right) = \frac{94}{45} \approx 2,09$$

38

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 3) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + 6 - 0 = \frac{14}{3}$$

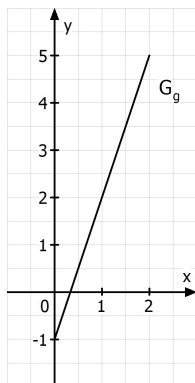
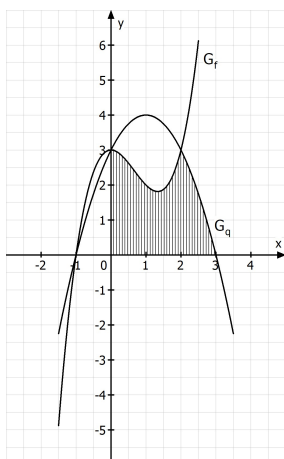
$$\int_2^3 q(x) dx = \int_2^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_2^3 =$$

$$= (-9 + 9 + 9) - \left(-\frac{8}{3} + 4 + 6 \right) = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 q(x) dx = \frac{14}{3} + \frac{5}{3} = \frac{19}{3}$$

$\frac{14}{3}$ ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das von G_f , der y-Achse und der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird.

$\frac{5}{3}$ ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das von G_q , der x-Achse und der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird.



39.1 Nullstelle: $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$$39.2 \quad \int_0^2 g(x) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - x \right]_0^2 = \left(\frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \right) - 0 = 4$$

Es handelt sich um eine Flächenbilanz, bei der die Fläche, die G_g mit der x-Achse einschließt und oberhalb der x-Achse liegt größer ist als die Fläche, die unterhalb der x-Achse liegt.

40

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{10} f(x) dx = \left[-\frac{1}{100} \left(\frac{1}{5}x^5 - 11x^4 + \frac{580}{3}x^3 - 1200x^2 \right) \right]_0^{10} = \\ &= -\frac{1}{100} \left(\frac{1}{5} \cdot 10^5 - 11 \cdot 10^4 + \frac{580}{3} \cdot 10^3 - 1200 \cdot 10^2 \right) - 0 = \frac{500}{3} \end{aligned}$$

41.1

$$f(x) = a(x+2)(x-2) \quad f(0) = 4 \Rightarrow 4 = a \cdot 2 \cdot (-2) \Rightarrow a = -1$$

$$A = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3}$$

41.2

G_f smf in $]-\infty; 2]$ sowie in $[2; \infty[$

G_f sms in $[-2; 2]$

$$x \rightarrow -\infty \quad F(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow \infty \quad F(x) \rightarrow -\infty$$

G_f hat HOP bei $x=2$ und bei $x=-2$ (Nullstellen mit VZW von f)

G_f hat einen Wendepunkt bei $x=0$ (Extremstelle von f)

$$42 \quad A = \int_2^6 g(x) dx = \left[-0,025 \left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 80x \right) \right]_2^6 = 9,3 - 2,9 = 6,4$$

43.1

Funktionsgleichung Funktion f (Bach): $f(x) = ax^2 + 28$

$P(40|0)$ einsetzen: $0 = 1600a + 28 \Rightarrow a = -0,0175$

$$\Rightarrow f(x) = -0,0175x^2 + 28$$

Funktionsgleichung Funktion g: $g(x) = -0,0175x^2 + 21,5$

Grundfläche des rechteckigen Hauses:

$$A = l \cdot b \quad l = x - 3 \quad b = g(x) - k(x) = -0,0175x^2 - 0,22x + 19,5$$

$$\Rightarrow A(x) = (x - 3) \cdot (-0,0175x^2 - 0,22x + 19,5) = -0,0175x^3 - 0,1675x^2 + 20,16x - 58,5$$

Definitionsmenge:

$$1) -0,0175x^2 + 21,5 = 0,22x + 2$$

$$\Rightarrow -0,0175x^2 - 0,22x + 19,5 = 0 \Rightarrow (x_1 = -40) \quad x_2 \approx 28$$

$$2) 0,22x + 2 \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{50}{11}$$

$$\Rightarrow D_A = \left[\frac{50}{11}; 28 \right]$$

$$A'(x) = -0,0525x^2 - 0,335x + 20,16$$

$$-0,0525x^2 - 0,335x + 20,16 = 0 \Rightarrow (x_1 \approx -23) \notin D_A \quad x_2 \approx 17$$

Skizze von A' :

$$\Rightarrow x = 17 \text{ Maximum}$$

Da G_A im Bereich $\left[\frac{50}{11}; 28 \right]$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem

Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow x = 17$ als Maximum

$$A(17) \approx 150 \text{ m}^2$$

$\Rightarrow$ die maximal mögliche Grundfläche eines Hauses auf diesem Grundstück

beträgt etwa 150 m^2

43.2

$$A_{\text{ebene Fläche}} = \int_0^{35} g(x) dx = \int_0^{35} (-0,0175x^2 + 21,5) dx = \left[-\frac{7}{1200}x^3 + 21,5x \right]_0^{35} =$$

$$\left(-\frac{7}{1200} \cdot 35^3 + 21,5 \cdot 35 \right) - 0 \approx 502,4 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{restliche ebene Fläche}} = 502,4 - 150 = 352,4 \text{ m}^2$$

Es steht noch genügend ebene Fläche für einen Garten zur Verfügung.

44

$$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

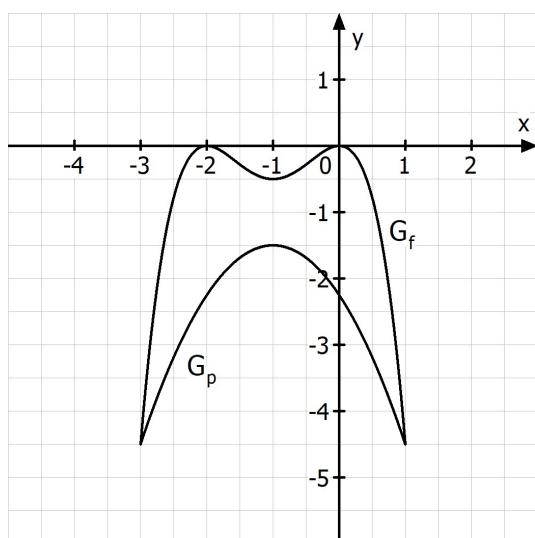
$$\int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 = \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}$$

45.1

$$p(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow p(x) = a \cdot (x + 1)^2 - 1,5$$

$$B(1 | -4,5) \Rightarrow -4,5 = a \cdot (1 + 1)^2 - 1,5 \Rightarrow -4,5 = 4a - 1,5 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 1,5$$



45.2

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^1 (f(x) - p(x)) dx = \int_{-3}^1 \left(\left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 \right) - \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \right) \right) dx = \\ &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \right) dx = \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x \right]_{-3}^1 = \\ &= \left(\frac{119}{60} \right) - \left(-\frac{99}{20} \right) = \frac{104}{15} \end{aligned}$$

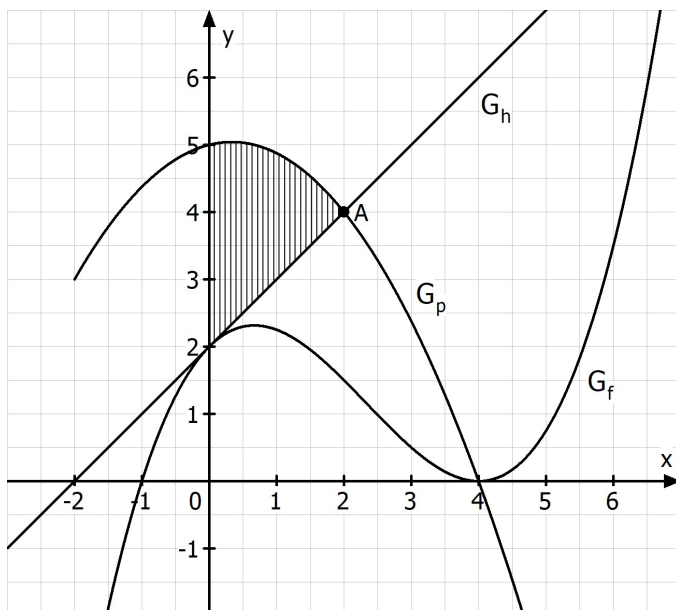
46.1

$$f(x) = a \cdot (x + 1)(x - 4)^2$$

$$P(0 | 2) \Rightarrow 2 = a \cdot (0 + 1)(0 - 4)^2 \Rightarrow 2 = 16a \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x + 1)(x - 4)^2$$

46.2



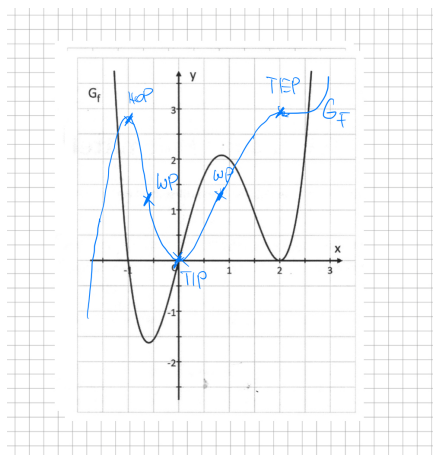
$$A = \int_0^2 (p(x) - h(x)) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 \right) dx = \left[-\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 3x \right]_0^2 = 3,5 - 0 = 3,5$$

- 47 $b = 1$, G_k ist punktsymmetrisch zum Ursprung, bei symmetrischen Integralgrenzen ist die Flächenbilanz gleich Null.

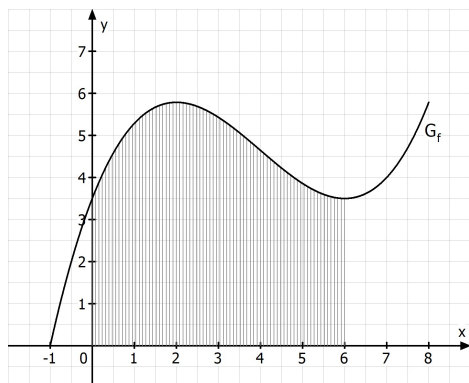
48.1

Aussage	w	f	n. e.
$f''(-1) > 0$	x		
$f'(2) = f(2)$	x		
Die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle $x = -0,5$ ist negativ.		x	
F hat genau drei Nullstellen.			x

48.2

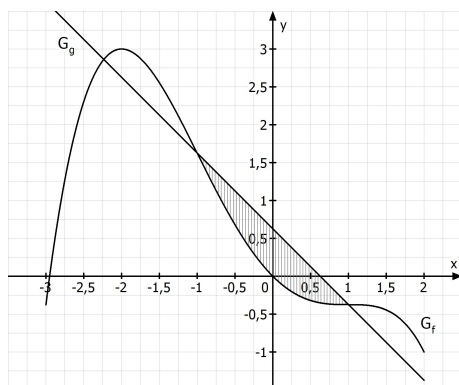


49



$$A = \int_0^6 f(x) dx = \left[\frac{1}{14} \left(\frac{1}{4} x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 49x \right) \right]_0^6 = \left(\frac{1}{14} \cdot 402 \right) - 0 \approx 28,71$$

50



$$A = \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^1 \left(-x + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{8}x \right]_{-1}^1 = (0,4) - (-0,4) = 0,8$$

51

a) $h'(x) \begin{matrix} \boxed{<} \\ \boxed{=} \\ \boxed{>} \end{matrix} 0 \quad \text{für } x < 0$ b) $h''(2) \begin{matrix} \boxed{<} \\ \boxed{=} \\ \boxed{>} \end{matrix} 0$

c) $\int_0^2 h(x) dx \begin{matrix} \boxed{<} \\ \boxed{=} \\ \boxed{>} \end{matrix} 0$ d) $H'(2) \begin{matrix} \boxed{<} \\ \boxed{=} \\ \boxed{>} \end{matrix} 0$

52.1

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^4 = \left(\frac{1}{20}4^5 - \frac{1}{4}4^4 \right) - \left(\frac{1}{20}(-1)^5 - \frac{1}{4}(-1)^4 \right) =$$

$$= -12,8 - (-0,3) = -12,5$$

Die Flächenbilanz ist negativ, d.h. die Fläche, die unterhalb der x-Achse liegt, ist größer als die Fläche, die oberhalb der x-Achse liegt.

52.2

G_g entsteht aus G_f durch Verschiebung um 7 nach oben in y-Richtung und da G_f bei $(3 | -6,75)$ einen absoluten Tiefpunkt besitzt, kann G_g dann keine Nullstelle mehr haben.

$$\int_1^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_1^3 7 dx = [7x]_1^3 = 7 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 21 - 7 = 14$$

53

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^6 (-0,2x^3 + 2,4x^2 - 7,2x) dx = \left[-0,05x^4 + 0,8x^3 - 3,6x^2 \right]_0^6 = \\ &= (-0,05 \cdot 6^4 + 0,8 \cdot 6^3 - 3,6 \cdot 6^2) - 0 = -21,6 \\ &\Rightarrow A = 21,6 \end{aligned}$$